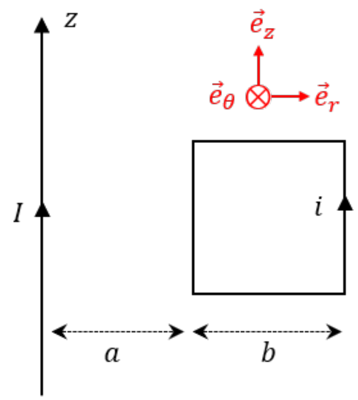
Induction | Chapitre 4 | Correction TD (I4)

Exercice n°1 • Inductance mutuelle entre une spire et un fil *cours*

1) On commence par orienter le circuit (choix arbitraire) comme indiqué sur le schéma ci-contre.



Par définition du flux, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_{f/s} &= \iint_{\text{spire}} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} \\
&= \int_{z=0}^{a} \int_{r=b}^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \overrightarrow{u_\theta} \cdot (-dz\, dr\, \overrightarrow{u_\theta}) \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^a dz \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} \\
&= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{a}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : le signe « $-$ » dépend du choix d'orientation de la spire.

2) Par définition,

$$\phi_{f/s} = MI \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{a}\right)}$$

Exercice n°2 • Induction mutuelle entre deux bobines ★☆☆

1) $\overrightarrow{B_2}$ est non nul dans la bobine 2 mais nul à l'extérieur (donc en particulier entre les deux bobines). $d\overrightarrow{S_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{B_2}$.

2) On a immédiatement (le champ $\overrightarrow{B_2}$ étant nul à l'extérieur de la bobine 2, l'intégrale est nulle également dès que $r > R_2$) :

$$\boxed{\phi_{2/1} = N_1 \times B_2 S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_2}{d_2} \pi R_2^2}$$

3) Ainsi,

$$\boxed{M = \frac{\phi_{2/1}}{i_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{d_2} \pi R_2^2}$$

4) Finalement,

$$\boxed{\phi_{1/2} = M i_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_1}{d_2} \pi R_2^2}$$

Exercice n°3 • Circuits LC couplés ★★☆

1) La loi des mailles dans chaque circuit donne :

$$\begin{aligned}
0 &= v_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\
0 &= v_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\boxed{\begin{aligned}
0 &= v_1 + LC\frac{d^2 v_1}{dt^2} + MC\frac{d^2 v_2}{dt^2} \\
0 &= v_2 + LC\frac{d^2 v_2}{dt^2} + MC\frac{d^2 v_1}{dt^2}
\end{aligned}}$$

2) On prend la somme et la différence des deux équations obtenues précédemment. On obtient :

$$0 = \sigma + (LC + MC)\frac{d^2\sigma}{dt^2} \quad \text{et} \quad 0 = \delta + (LC - MC)\frac{d^2\delta}{dt^2}$$

On pose :

$$\boxed{\omega_\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC + MC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_\delta = \frac{1}{\sqrt{LC - MC}}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ddot{\sigma} + \omega_\sigma^2\, \sigma = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\ddot{\delta} + \omega_\delta^2\, \delta = 0}$$

3) Solutions générales :

$$\sigma(t) = A\cos(\omega_\sigma t) + B\sin(\omega_\sigma t) \quad \text{et} \quad \delta(t) = C\cos(\omega_\delta t) + D\sin(\omega_\delta t)$$

Les conditions initiales du problème imposent :

$$\begin{cases} i_1(0^-) = 0 \\ i_2(0^-) = 0 \\ v_1(0^-) = E \\ v_2(0^-) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(0^+) = 0 \\ i_2(0^+) = 0 \\ v_1(0^+) = E \\ v_2(0^+) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma(0^-) = E \\ \delta(0^-) = E \\ \dot{\sigma}(0^-) = 0 \\ \dot{\delta}(0^-) = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sigma(t) = E\cos(\omega_\sigma t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta(t) = E\cos(\omega_\delta t)}$$

Finalement,

$$\boxed{v_1(t) = \frac{E}{2}\Big[\cos(\omega_\sigma t) + \cos(\omega_\delta t)\Big]} \quad \text{et} \quad \boxed{v_2(t) = \frac{E}{2}\Big[\cos(\omega_\sigma t) - \cos(\omega_\delta t)\Big]}$$

Où avec l'aide du formulaire :

$$\boxed{\begin{aligned} v_1(t) &= E\cos\left(\frac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2}\,t\right) \\ v_2(t) &= -E\sin\left(\frac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2}\,t\right)\sin\left(\frac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2}\,t\right) \end{aligned}}$$

4) On a :

$$\omega_\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC + MC}} = \omega_0\left(1 + \frac{M}{L}\right)^{1/2} = \boxed{\omega_0\left(1 - \frac{M}{2L}\right)}$$

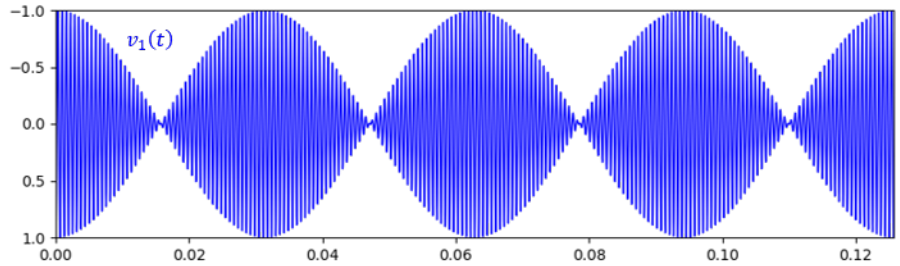
De même,

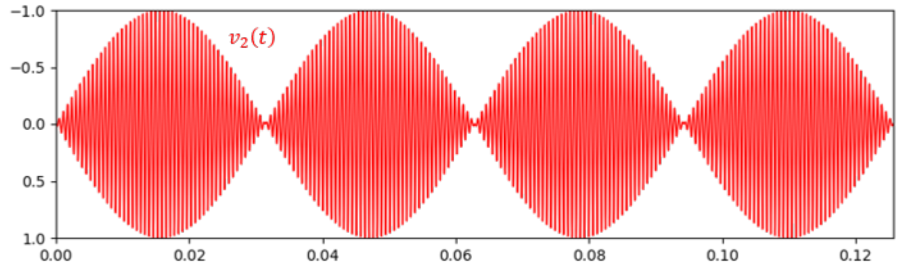
$$\omega_\delta = \frac{1}{\sqrt{LC - MC}} = \omega_0\left(1 - \frac{M}{L}\right)^{1/2} = \boxed{\omega_0\left(1 + \frac{M}{2L}\right)}$$

5) On en déduit:

$$v_1(t) = \underbrace{E\cos\left(\frac{\omega_0 M}{2L}\,t\right)}_{=\,\text{env}(t)}\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \underbrace{E\sin\left(\frac{\omega_0 M}{2L}\,t\right)}_{=\,\text{env}(t)}\sin(\omega_0 t)$$

Le terme d'enveloppe est le terme qui varie le plus lentement. Il s'agit de la fonction de faible pulsation (donc grande période). Pour tracer ces fonctions, il faut alors (comme pour des oscillations amorties), tracer $\pm$ env(t). La vraie fonction oscille dans l'enveloppe $2L/M = 100$ fois plus rapidement que l'enveloppe.





Exercice n°4 • Circuits RL couplés ★★★

1) La loi des mailles dans chaque circuit donne :

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= R_p i_p + L_p\frac{di_p}{dt} + M\frac{di_s}{dt} \\ 0 &= R_s i_s + L_s\frac{di_s}{dt} + M\frac{di_p}{dt} \end{aligned}}$$

2) On se place en RSF. Les ED deviennent :

$$\begin{aligned} &(1) \quad E = (R_p + j\omega L_p)\,\underline{I_p} + j\omega M\,\underline{I_s} \\ &(2) \quad 0 = (R_s + j\omega L_s)\,\underline{I_s} + j\omega M\,\underline{I_p} \end{aligned}$$

L'équation (2) donne :

$$\boxed{\eta = \frac{\underline{I_s}}{\underline{I_p}} = -\frac{j\omega M}{R_s + j\omega L_s}}$$

On injecte le résultat dans l'équation (1).

$$E = (R_p + j\omega L_p)\,\underline{I_p} + j\omega M \times \frac{-j\omega M}{R_s + j\omega L_s}\,\underline{I_p}$$

Ainsi,

$$\boxed{\underline{I_p} = \frac{E}{R_p + j\omega L_p + \dfrac{\omega^2 M^2}{R_s + j\omega L_s}}}$$

3) Si on néglige directement R devant $j\omega L$, le dénominateur devient nul. On fait donc un DL à l'ordre 1 du dénominateur.

$$\begin{aligned}\underline{I_p} &= \frac{E}{R_p + j\omega L_p + \dfrac{\omega^2 M^2}{j\omega L_s}\left(1 + \dfrac{R_s}{j\omega L_s}\right)^{-1}} \\ &\simeq \frac{E}{R_p + j\omega L_p - j\omega L_p\left(1 - \dfrac{R_s}{j\omega L_s}\right)} \\ &= \frac{E}{R_p + R_s/m^2}\end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{R_{eq} = R_p + R_s/m^2}$. Le circuit secondaire est donc équivalent à une résistance R_s/m^2 du point de vue du circuit primaire.

4) On constate que η est non nul à l'ordre 0. On a donc directement :

$$\boxed{\eta \simeq -\frac{j\omega M}{j\omega L_s} = -\frac{M}{L_s} = -\frac{1}{m}}$$

Pour la suite, on a néanmoins besoin de η à l'ordre 1, qui vaut :

$$\eta = -\frac{M}{L_s}\left(1 + \frac{R_s}{j\omega L_s}\right)^{-1} \simeq -\frac{M}{L_s}\left(1 - \frac{R_s}{j\omega L_s}\right)$$

Le rapport des tensions des bobinages vaut :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_p}} = \frac{j\omega\left(L_s\underline{I_s} + M\underline{I_p}\right)}{j\omega\left(L_p\underline{I_p} + M\underline{I_s}\right)} = \frac{L_s\eta + M}{L_p + M\eta} = \frac{-M + \dfrac{MR_s}{j\omega L_s} + M}{L_p - \dfrac{M^2}{L_s} + \dfrac{M^2 R_s}{j\omega L_s^2}} = \frac{L_s}{M} = \boxed{m}$$

5) Attention, une puissance n'est pas égale au produit des amplitudes complexes : $\mathcal{P} \neq \underline{U} \cdot \underline{I}$. Il faut revenir à la définition de base : $\mathcal{P}(t) = u(t) \cdot i(t)$.

On connaît l'expression de $\underline{I_p}$. Il s'agit d'un réel positif (noté $I_p = E/R_{eq}$). On en déduit le signal réel :

$$i_p(t) = I_p \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad i_s(t) = -\frac{I_p}{m}\cos(\omega t)$$

À l'aide de la loi d'Ohm (attention, en convention générateur) sur R_s, on en déduit :

$$u_s(t) = -R_s i_s(t) = \frac{R_s I_p}{m}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad u_p(t) = \frac{R_s I_p}{m^2}\cos(\omega t)$$

On en déduit les puissances demandées. Les enroulement étant en convention récepteur (r pour reçue et f pour fournie) :

$$\mathcal{P}_{r,p} = u_p i_p = \frac{R_s I_p^2}{m^2}\cos^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{f,s} = -u_s i_s = \frac{R_s I_p^2}{m^2}\cos^2(\omega t)$$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{P}_{r,p}(t) = \mathcal{P}_{f,s}(t)}$.

6) On reprend les lois des mailles de la question 1. On multiplie la première équation par i_p et la deuxième par i_s, puis on somme les deux équations. On obtient le bilan de puissance du montage.

$$u i_p = R_p i_p^2 + R_s i_s^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_p i_p^2 + \frac{1}{2}L_s i_s^2 + M i_p i_s\right)$$

<u>Propriété</u> : la valeur moyenne de la dérivée d'une fonction périodique est toujours nulle.

<u>Démonstration</u> : soit $f(t)$ une fonction périodique et f_0 sa valeur moyenne. Alors,

$$\langle f(t)\rangle = f_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\langle f(t)\rangle}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\langle \frac{df(t)}{dt}\right\rangle = 0}$$

Il est possible d'intervertir valeur moyenne et dérivée car l'opérateur valeur moyenne n'est rien d'autre qu'une intégrale sur un intervalle de longueur fini (de longueur T, la période).

Prenons ainsi la valeur moyenne du bilan de puissance.

$$\frac{EI_p}{2} = \frac{R_p I_p^2}{2} + \frac{R_s I_s^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{R_{eq} I_p^2}{2}}_{=\langle \mathcal{P}_g\rangle} = \frac{R_p I_p^2}{2} + \underbrace{\frac{R_s I_p^2}{2m^2}}_{=\langle \mathcal{P}_r\rangle}$$

On en déduit le rendement :

$$r = \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_g \rangle} = \frac{R_s/m^2}{R_{eq}} = \boxed{\frac{1}{1 + m^2/\beta}}$$

7) On cherche le maximum de la fonction $\langle \mathcal{P}_r(R_s) \rangle$.

$$0 = \frac{d\,\langle \mathcal{P}_r \rangle}{dR_s} = \frac{E^2}{2m^2} \cdot \frac{R_{eq}^2 - R_s \cdot 2R_{eq}/m^2}{R_{eq}^4} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{2R_s}{m^2} \quad \Rightarrow \quad R_p = \frac{R_s}{m^2}$$

On en déduit : $\boxed{\beta = m^2}$.